Proceedings of IAM, V.13, N.2, 2024, pp.220-247
DOI: 10.30546/2225-0530.2024.13.2.032

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. Р. Аманова

Бакинский Государственный Униветситет, Баку, Азербайджан
e-mail: amanova.n.93@gmail.com

Абстракт. В статье рассмотрена первая краевая задача для неравномерно и сильно вырожденного эллиптико-параболического уравнения второго порядка в недивергентной форме. Доказана условий типа Кордеса, обеспечивающих однозначную разрешимость первой краевой задачи в соответствующем весовом пространстве Соболева.

Ключевые слова: Неравномерно и сильно вырожденного, эллиптико-параболических уравнений.

AMS Subject Classification: 35J67, 35J25, 35D40, 35J70.

1. Введение

Пусть E_nи R_{n+1}- евклидовы пространства точек $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $(x,t)=(x_1,\dots,x_n,t)$, соответственно, $n\geq 3, \Omega$ ограниченная область в E_n с границей $\partial\Omega\in C^2, 0\in\Omega, Q_T$- цилиндр $\Omega\times(-T,0)$, где $T\in(0,\infty)$, $\Gamma(Q_T)=\{(x,t)\ |x\in\Omega, t=-T\}\cup[-T,0]$- параболическая граница Q_T.

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{ij}+\phi(0-t)u_{tt}-u_t=f(x,t),(x,t)\in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u\ \Big|_{\Gamma(Q_T)}=0, \tag{1.2}$$

предположим, что $\left\|a_{ij}(x,t)\right\|$ действительная симметрическая матрица, причем для всех $(x,t)\in Q_T$ и $\xi\in E_n$ выполнено условие

$$\gamma\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leq\gamma^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2; \tag{1.3}$$

$$\sigma=\sup_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^2\right]-\frac{1}{n-e^2}<0; \tag{1.4}$$

$$\phi(z)\in C^1[-T,0],\phi(z)\geq 0,\phi'(z)\geq 0,\phi(0)=0,$$
$$\phi'(0)=0,\phi(z)\geq\beta_1 z\phi'(z),\beta_1>0\text{- константа.} \tag{1.5}$$

Здесь $u=u(x,t)$, $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $(i,j=1,\dots,n)$, $\gamma\in(0,1]$ - константа, $e=\inf_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}/\sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}$.

Всюду в работе предполагается, что

$$\lambda_i(x,t)=\left[\frac{\omega_i^{-1}\left(\rho(x)+\sqrt{|t|}\right)}{\rho(x)+\sqrt{|t|}}\right]^2, i=1,\dots,n,$$

где $\rho(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|)$.

Относительно функций $\omega_i(z)$ для $i=1,\ldots,n$ будем предполагать выполнение следующих условий: $\omega_i(z)$- непрерывные и строго монотонно возрастающие на $[0,\mathrm{diam}\Omega]$ функции, $\omega_i(0)=0, \omega_i^{-1}(z)$ функции, обратные к $\omega_i(z)$ и кроме того

$$\alpha\cdot\omega_i(R)\le\omega_i(\eta\cdot R)\le\beta\omega_i(R), R\in\left(0,\frac{\mathrm{diam}\Omega}{2}\right], \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^{q-1}\cdot\int_0^{\omega_i^{-1}(R)}\left(\frac{\omega_i(\tau)}{\tau}\right)^q d\tau\le A\cdot R, R\in(0,\mathrm{diam}\Omega) \tag{1.7}$$

для некоторых $\beta\in(1,\infty), \eta>0$ и $q>n$, причем константы A в (1.7) и α,β,η в (1.6) не зависят от R. Кроме того, предположим, что элементы матрицы $\|a_{ij}(x,t)\|$ являются измеримыми в Q_T функциями.

Условие (1.4) называется параболическим условием типа Кордеса (см. [1-8], 9, 11).

Пусть $x^0\in E_n, R>0, k>0, E_R^{x^0}(k)$-эллипсоид $\left\{x:\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_i^0)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}<k^2\right\}$, $\Pi_{R:k}(x^0)$-параллелепипед$\left\{x:\left|x_i-x_i^0\right|<k\cdot\omega_i^{-1}(R), i=1,\ldots,n\right\}$ и для $t^1<t^2$ $C_{R:k}^{t^1,t^2}(x^0)$-цилиндр $E_R^{x^0}(k)\times(t^1,t^2)$ (или $\Pi_{R:k}(x^0)\times(t^1,t^2)$).

Пусть $\overline{E}_R^{x^0}(k)\subset\Box, \left(x',t'\right)\in\Box\left(C_{R:1+\frac{r}{2}}^{-\left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2,0}(0)\right), c_r=c_r(x',t')=$ $C_{R:r}^{t'-r^2R^2,t'}(x^0)$, $C_R'=C_{R:\frac{r}{2}}^{t'-r^2R^2/2,t'}\left(x'\right)$, где R -произвольное фиксированное число из полуинтервала $(0,1]$, а $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Скажем, что $u\in A(c_r)$, если существует компакт $K_u\subset E_R^{x'}(k)$ такой, что $\mathrm{supp}u(x,t)\subset\bar{K}_u\times\left[t'-r^2R^2,t'\right], u\in c^\infty(\bar{c}_r), u\ \Big|_{t=t'-r^2R^2}=0$.

Обозначим через $W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(Q_T)$ банахово пространство функций $u(x,t)$, заданных на Q_T, с конечной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(Q_T)}\left(\int_{Q_T}\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_i^2+u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\phi^2(0-t)u_{tt}^2+2\phi(0-t)\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_{it}^2\right)dxdt\right)^{1/2}, \tag{*}$$

где $u_{it}=\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial t}(i=1,\ldots,n), \lambda=\left(\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_n(x,t)\right)$ и пусть $\overset{\circ}{W}{}_{2,\lambda,\varphi}^{2,2}\left(Q_T\right)$-пополнение множества всех функций $u\in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right), u\ \Big|_{\Gamma(Q_T)}=0$ по норме пространства $W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(Q_T)$.

Функция $u\left(x,t\right)\in\overset{\circ}{W}{}_{2,\lambda,\varphi}^{2,2}\left(Q_T\right)$ называется сильным решением краевой задачи (1.1)-(1.2), если она удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на

Q_T. Запись $C(\dots)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содерженного скобок.

2. Основная коэрцитивная оценка

Лемма 2.1. Для $(x,t) \in C_r$ имеют место оценки

$$c_{1.2.1}(n)\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2 \le \lambda_i(x,t) \le c_{1.2.2}(n)\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2, i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Если $(x,t) \in C_r$, то согласно неравенству Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i - x_i'\right)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i'\right)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} \le r + \left(1+\frac{r}{2}\right) = 1 + \frac{3r}{2}.$$

Отсюда следует, что для $i = 1,\dots,n$, $|x_i| \le \left(1+\frac{3r}{2}\right)\omega_i^{-1}(R) \le 2\omega_i^{-1}(R)$ т.е. $\omega_i(|x_i|) \le \omega_i\left(2\omega_i^{-1}(R)\right) \le \beta R$, $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|) \le n\beta R$.

С другой стороны

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} \ge \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i'\right)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i - x_i'\right)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} \ge 1 + \frac{r}{2} - r \ge \frac{3}{4}\cdot r.$$

Тогда существует $i_0, 1 \le i_0 \le n$, такое, что $\frac{x_{i_0}^2}{\left(\omega_{i_0}^{-1}(R)\right)^2} \ge \frac{9}{16n}$, т.е. $\left|x_{i_0}\right| \ge \frac{3}{4\sqrt{n}}\cdot\omega_{i_0}^{-1}(R)$. Тем самым

$$\omega_i(|x_i|) \ge \omega_i\left(\frac{3}{4\sqrt{n}}\omega_i^{-1}(R)\right) \ge \alpha R, \rho(x) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|) \ge n\alpha R.$$

Аналогично $|t| \le \left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2 + r^2R^2 \le 2R^2$, т.е. $\sqrt{|t|} \le \sqrt{2}R$.

Таким образом

$$\left[\frac{\omega_i^{-1}\left(n\alpha R + \sqrt{2}R\right)}{n\beta R + \sqrt{2}R}\right]^2 \le \left[\frac{\omega_i^{-1}\left(\rho(x) + \sqrt{|t|}\right)}{\rho(x) + \sqrt{|t|}}\right]^2 \le \left[\frac{\omega_i^{-1}\left(n\beta R + \sqrt{2}R\right)}{n\alpha R + \sqrt{2}R}\right]^2$$

и доказательство Леммы завершено.

Рассмотрим следующий модельный оператор с постоянными коэффициентами $L_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(x', t'\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \phi(0-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}$.

Лемма 2.2. Если функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям (1.5), то существует $T_1(\phi, n)$ такое, что при $T \le T_1$ для любой функции $u \in A(C_r)$ имеет место следующая оценка

$$\int_{C_r}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2+u_t^2+\phi^2(0-t)u_{tt}^2+2\phi(0-t)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_{it}^2\right)dxdt\leq\big(1+2(n+1)q(T)\big)\cdot\int_{C_r}(L_0u)^2dxdt, \qquad (2.1)$$

где $q(T)=\sup\limits_{[-T,0]}\phi'(z)$.

Доказательство. Сделаем преобразование координат $y_i=\frac{x_i}{\omega_i^{-1}(R)}$, $i=1,\dots,n$, $\tau=t$. Пусть $\tilde{u}(y,\tau)$ и $\tilde{C}_r$ образы функции $u(x,t)$ и цилиндра C_r соответственно. Ясно, что оператор L_0 перейдет в оператор

$$\tilde{L}_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x',t')\frac{R^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\phi(0-t)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

Согласно Лемме 2.1 для любого $\xi\in E_n$, $c_{1.1}|\xi|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\cdot\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\xi^2\leq c_{1.2}\cdot|\xi|^2$. Тогда $\tilde{L}_0$ является равномерно параболическим оператором в $\tilde{C}_r$. Имеем

$$I=\int_{\tilde{C}_r}\left(\tilde{L}_0\tilde{u}\right)^2dyd\tau=\int_{\tilde{C}_r}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\cdot\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_i^2}\right)dyd\tau+$$

$$+2\int_{\tilde{C}_r}\phi(0-\tau)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_i^2}dyd\tau-$$

$$-2\int_{\tilde{C}_r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_i^2}dyd\tau+\int_{\tilde{C}_r}\phi^2(0-\tau)\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\right)dyd\tau+$$

$$+\int_{\tilde{C}_r}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\right)^2dyd\tau-2\int_{\tilde{C}_r}\phi(0-\tau)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}dyd\tau=$$

$$=i_1+i_2+i_3+i_4+\int_{\tilde{C}_r}\phi^2(0-\tau)\tilde{u}_{\tau\tau}^2\,dyd\tau+\int_{\tilde{C}_r}\tilde{u}_\tau^2\,dyd\tau. \qquad (2.2)$$

Очевидно, что

$$i_1=\int_{\tilde{C}_r}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_i^2}\right)dyd\tau$$

$$=\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\frac{R^2\lambda_j(x',t')}{\left(\omega_j^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{ii}\cdot\tilde{u}_{jj}dyd\tau=$$

$$=\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\frac{R^2\lambda_j(x',t')}{\left(\omega_j^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{ij}^2dyd\tau\geq c_{1.1}^2\cdot\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{u}_{ij}^2dyd\tau; \qquad (2.3)$$

Пусть $\tilde{u}_{ii}(y,t'-r^2R^2)=0$и $\phi\big(0-t'\big)=0$. Тогда

$$i_2 = 2\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \phi'(0-\tau)\tilde{u}_{ii}\tilde{u}_\tau dyd\tau$$

$$-\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \phi(0-\tau)\tilde{u}_{ii\tau} \cdot \tilde{u}_\tau dyd\tau \geq$$

$$= -\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \phi'(0-\tau)\tilde{u}_{ii}^2 dyd\tau$$

$$-\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \phi'(0-\tau)\tilde{u}_\tau^2 dyd\tau +$$

$$+2\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \phi(0-\tau)\tilde{u}_{i\tau}^2 dyd\tau \geq$$

$$\geq -\int_{\tilde{C}_r} \phi'(0-\tau) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \frac{R^2\lambda_j(x',t')}{\left(\omega_j^{-1}(R)\right)^2} \cdot \tilde{u}_{ij}^2 dyd\tau -$$

$$-q \cdot n \cdot c_{1.2} \cdot \int_{\tilde{C}_r} \tilde{u}_\tau^2 dyd\tau + 2c_{1.1} \cdot \int_{\tilde{C}_r} \phi(0-\tau) \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{i\tau}^2 dyd\tau \geq$$

$$-q \cdot c_{1.2}^2 \cdot \int_{\tilde{C}_r} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{u}_{ij}^2 dyd\tau - qnc_{1.2} \cdot \int_{\tilde{C}_r} \tilde{u}_\tau^2 dyd\tau + 2c_{1.1} \int_{\tilde{C}_r} \phi(0-\tau) \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{i\tau}^2 dyd\tau; \quad (2.4)$$

$$i_3 = -2\int_{\tilde{C}_r} \tilde{u}_\tau \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \tilde{u}_{ii} dyd\tau =$$

$$= 2\int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \tilde{u}_i \cdot \tilde{u}_{i\tau} dyd\tau = \int_{\tilde{C}_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \left(\tilde{u}_i^2\right)_\tau dyd\tau =$$

$$= \int_{\tilde{E}_R^{x'}(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \cdot \tilde{u}_i^2(y,t') dy \geq 0, \quad (2.5)$$

где $\tilde{E}_R^{x'}$ - образ эллипсоида $E_R^{x'}$.

$$i_4 = -2\int_{\tilde{C}_r} \phi(0-\tau)\tilde{u}_{\tau\tau} \cdot \tilde{u}_\tau dyd\tau = -\int_{\tilde{C}_r} \phi(0-\tau) \cdot (\tilde{u}_\tau^2)_\tau \, dyd\tau \geq$$

$$\geq -\int_{\tilde{C}_r} \phi'(0-\tau)\tilde{u}_\tau^2 \, dyd\tau \geq -q\int_{\tilde{C}_r} \tilde{u}_\tau^2 \, dyd\tau. \quad (2.6)$$

Подставляя соотношения (2.3)-(2.6) в равенство (2.2), мы получаем неравенство

$$I \geq (c_{1.1}^2 - q \cdot c_{1.2}^2) \cdot \int_{\tilde{C}_r} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{u}_{ij}^2 dyd\tau + \int_{\tilde{C}_r} \phi^2(0-\tau)\tilde{u}_{\tau\tau}^2 dyd\tau +$$

$$+(1 - qnc_{1.2} - q) \cdot \int_{\tilde{C}_r} \tilde{u}_\tau^2 dyd\tau + 2c_{1.1} \int_{\tilde{C}_r} \phi(0-\tau) \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{i\tau}^2 dyd\tau.$$

Возвращаясь к переменным (x,t), заключаем

$$(c_{1.1}^2-q\cdot c_{1.2}^2)\cdot\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\cdot\frac{\omega_j^{-1}(R)}{R}\right)^2 u_{ij}^2dxdt+$$

$$+\int_{C_r}\phi^2(0-t)u_{tt}^2dxdt+(1-qnc_{1.2}-q)\int_{C_r}u_t^2dyd\tau+$$

$$+2c_{1.1}\int_{C_r}\phi(0-t)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2\cdot u_{it}^2dxdt\le\int_{C_r}(L_0u)^2dxdt. \tag{2.7}$$

Теперь достаточно применит лемму 2.1. Имеем

$$I\ge\left(1-q(T)\right)\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2dxdt+\left(1-(n+1)q(T)\right)\int_{C_r}u_t^2dxdt$$
$$+$$
$$+\int_{C_r}\phi^2(0-t)u_{tt}^2dxdt+2\int_{C_r}\phi(0-t)\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_{it}^2dxdt. \tag{2.8}$$

Выберем T_1 настолько малым, что $(n+2)q(T_1)\le\frac{1}{2}$. Тогда для $T\le T_1$

$$\frac{1}{1-(n+1)q(T)}\le1+\frac{(n+1)q(T)}{1-(n+2)q(T)}\le1+2(n+1)q(T). \tag{2.9}$$

Требуемая оценка (2.1) следует из (2.8)-(2.9).

Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Если функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям (1.5), то при $T\le T_1,\tau\in[0,1]$ для любой функции$u\in A(C_r)$, имеет место следующая оценка

$$\int_{C_r}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2+u_t^2+u_{tt}^2+\phi^2(0-t)u_{tt}^2+2\phi(0-t)\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_{it}^2\right)dxdt\le$$
$$\le\left(1+2(n+2)q(T)\right)\cdot\int_{C_r}\left(L_0u-\frac{\tau}{T}\right)^2dxdt.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $\tau>0$. Через μ' обозначим$\frac{\tau}{T}$. Имеет неравенство

$$I_1=\int_{C_r}\left(L_0u-\mu'u\right)^2dxdt$$
$$=\int_{C_r}(L_0u)^2dxdt+\left(\mu'\right)^2\int_{C_r}u^2dxdt-2\mu'\cdot\int_{C_r}u\cdot L_0udxdt=$$
$$=\int_{C_r}(L_0u)^2dx+\left(\mu'\right)^2\int_{C_r}u^2dxdt-2\mu'\cdot\int_{C_r}u\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(x',t'\right)u_{ii}\,dxdt+2\mu'$$
$$\cdot\int_{C_r}u\cdot u_tdxdt-$$

$$-2\mu' \cdot \int_{C_r} u \cdot \phi(0-t)u_{tt}dxdt$$
$$\geq \left(1-q(T)\right) \cdot \int_{C_r} u \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2\,dxdt +$$
$$+\left(1-(n+1)q(T)\right) \cdot \int_{C_r} u_t^2 dxdt + \int_{C_r} \phi^2(0-t)u_{tt}^2 dxdt$$
$$+\,2\int_{C_r} \phi(0-t) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)u_{it}^2\,dxdt +$$
$$+\left(\mu'\right)^2 \int_{C_r} u^2 dxdt - 2\mu' \cdot \int_{C_r} u \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x',t'\right)u_{ii}\,dxdt + 2\mu' \cdot \int_{C_r} u \cdot u_t dxdt -$$
$$2\mu' \cdot \int_{C_r} \phi(0-t)u \cdot u_t dxdt.$$

Но с другой стороны

$$-2\mu' \cdot \int_{C_r} u \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x',t'\right)u_{ii}\,dxdt = 2\mu' \cdot \int_{C_r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x',t'\right)u_i^2\,dxdt \geq 2\mu' \cdot$$
$$c_{1.1} \cdot \int_{C_r} \left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right) u_i^2 dxdt \geq 0;$$
$$2\mu' \int_{C_r} u \cdot u_t dxdt = \mu' \cdot \int_{E_R^{x'}(r)} u^2 \Big|_{t'-R^2r^2}^{t'} dx = \mu' \cdot \int_{E_R^{x'}(r)} u^2\left(x,t'\right)dx \geq 0.$$

Кроме того, для любого $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$-2\mu' \cdot \int_{C_r} \phi(0-t)u \cdot u_{tt}dxdt$$
$$= 2\mu' \int_{C_r} \phi(0-t)u_t^2 dxdt - 2\mu' \int_{C_r} \phi'(0-t)uu_t dxdt \geq$$
$$\geq -2\mu' q(T) \cdot \int_{C_r} |u| \cdot |u_t| dxdt \geq -\mu'\alpha q \int_{C_r} u_t^2 dxdt - \mu'\alpha^{-1} q \int_{C_r} u^2 dxdt.$$

Выбигая $\alpha = (\mu')^{-1}$ и принимая во внимание что $q(T) \leq 1$, получаем неравенство

$$I_1 \geq \left(1-q(T)\right) \cdot \int_{C_r} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2\,dxdt + \int_{C_r} \phi^2(0-t)u_{tt}^2 dxdt +$$
$$+(1-(n+2)q) \int_{C_r} u_t^2 dxdt + 2\int_{C_r} \phi(0-t) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)\, u_{it}^2 dxdt,$$

что влечет за собой требуемое неравенство.

Ниже, если это не оговороно особо, мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $\phi(z) > 0$ при $z > 0$. Если $\phi(z) \equiv 0$, то уравнение (1.1) является параболическим, а соответствующий результат о разрешимости первой краевой задачи был получен в [1, 2]. Если $\phi(z) = 0$ при $z \in [-T, z^0]$, тогда решение задачи (1.1)-(1.2) получается посредством склейки решения $u(x,t)$ этой задачи в цилиндре Q_{z^0} и решения $\vartheta(x,t)$ первой краевой задачи для параболического уравнения в цилиндре $\Omega \times (z^0, 0)$ с граничными условиями $\vartheta(x,z^0) = u(x,z^0), \vartheta \;\Big|_{\partial\Omega\times[z^0,0]} = 0$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (-T, 0)$ и введем функцию$\phi_\varepsilon(z)$ следующим образом:

$$\phi_\varepsilon(z)=\begin{cases}\phi(\varepsilon)-\dfrac{\phi'(\varepsilon)\cdot\varepsilon}{m}+\dfrac{\phi'(\varepsilon)}{m\varepsilon^{m-1}}\cdot z^m \text{при} z\in[-T,\varepsilon),\\ \phi(\varepsilon)\text{при} z\in[\varepsilon,0],\end{cases}$$

где $m=2\beta_1^{-1}$. Очевидно, что $\phi_\varepsilon(z)\in C^1[-T,0]$. Доказано, что при $z\in[-T,0]$ (см. [2])

$$\phi_\varepsilon(z)\geq\frac{1}{2}\phi(z). \tag{2.10}$$

Без ограничения общности предположим, что $m>1$. Тогда (см. [2])

$$q_\varepsilon(0)=\sup_{[-T,0]}\phi_\varepsilon'(z)\leq q(0). \tag{2.11}$$

Теперь определим оператор

$$L_\varepsilon=\sum_{i=1}^n\lambda_i\left(x',t'\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\phi_\varepsilon(0-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}.$$

Лемма 2.3. Пусть функция с удовлетворяет условиям (1.5). Тогда для любой функции $u(x,t)\in A(C_r)$ при $T\leq T_1$ имеет место следующая оценка

$$\int_{C_r}\left(\sum_{i,j=1}^n\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2+u_t^2+\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt}^2\right.$$
$$\left.+2\phi_\varepsilon(0-t)\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)\,u_{tt}^2\right)dxdt\leq$$
$$+\big(1+2(n+1)q(T)\big)\cdot\int_{C_r}(L_\varepsilon u)^2dxdt. \tag{2.12}$$

Доказательство. Сделаем преобразование координат $y_i=\frac{x_iR}{\omega_i^{-1}(R)}$, $i=1,\dots,n$, $\tau=t$. Пусть $\tilde u(y,\tau)$ и $\tilde C_r$ образы функции $u(x,t)$ и цилиндра C_r соответственно. Ясно, что оператор $\tilde L_\varepsilon$,

$$\tilde L_\varepsilon=\sum_{i,j=1}^n\frac{R^2\lambda_i\left(x',t'\right)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\phi_\varepsilon(0-\tau)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}$$

является равномерно параболическим оператором в $\tilde C_r$. Имеем

$$\int_{\tilde C_r}\left(\tilde L_\varepsilon\tilde u\right)^2dyd\tau=\int_{\tilde C_r}\left(\sum_{i=1}^n\frac{R^2\lambda_i\left(x',t'\right)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial y_i^2}\right)^2dyd\tau$$
$$+2\int_{\tilde C_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\tau^2}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{R^2\lambda_i\left(x',t'\right)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial y_i^2}dyd\tau-$$
$$-2\int_{\tilde C_r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\tau}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{R^2\lambda_i\left(x',t'\right)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial y_i^2}dyd\tau+\int_{\tilde C_r}\phi_\varepsilon^2(0-\tau)\left(\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\tau^2}\right)^2dyd\tau+$$
$$+\int_{\tilde C_r}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial\tau}\right)^2dyd\tau-2\int_{\tilde C_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\tau^2}\cdot\frac{\partial\tilde u}{\partial\tau}dyd\tau. \tag{2.13}$$

Но с другой стороны

$$2\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\tilde{u}_{\tau\tau}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\tilde{u}_{ii}dyd\tau$$

$$=-2\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\phi_\varepsilon(0-\tau)\tilde{u}_{ii}\right)_\tau\cdot\tilde{u}_\tau dyd\tau=$$

$$=2\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon'(0-\tau)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{ii}\cdot\tilde{u}_\tau dyd\tau$$

$$-\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{iir}\cdot\tilde{u}_\tau dyd\tau\geq$$

$$\geq-\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon'(0-\tau)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{ii}^2dyd\tau$$

$$-\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\phi_\varepsilon'(0-\tau)\tilde{u}_\tau^2\,dyd\tau+$$

$$+2\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2\lambda_i(x',t')}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\cdot\tilde{u}_{i\tau}^2dyd\tau\geq-q_\varepsilon(T)c_{1.2}^2\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{ij}^2\,dyd\tau-$$

$$-q_\varepsilon(T)n\cdot c_{1.2}\int_{\tilde{C}_r}\tilde{u}_\tau^2\,dyd\tau+2c_{1.1}\cdot\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\cdot\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{i\tau}^2dyd\tau. \qquad (2.14)$$

Аналогично

$$-2\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)\cdot\tilde{u}_{\tau\tau}\cdot\tilde{u}_\tau dyd\tau=-\int_{\tilde{C}_r}\phi_\varepsilon(0-\tau)(\tilde{u}_\tau^2)_\tau dyd\tau\geq$$

$$\geq-\int_{\tilde{C}_r}\phi'(0-\tau)\tilde{u}_\tau^2dyd\tau\geq-q_\varepsilon(T)\int_{\tilde{C}_r}\tilde{u}_\tau^2\,dyd\tau. \qquad (2.15)$$

Возвращаясь к переменным (x,t) и применяя лемму 2.1, имеем

$$\int_{C_r}(L_\varepsilon u)^2dyd\tau\geq\left(1-q_\varepsilon(T)\right)\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2dxdt$$

$$+\left(1-(n+1)q_\varepsilon(T)\right)\cdot\int_{C_r}u_t^2dxdt+$$

$$+\int_{C_r}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt}^2dxdt+2\int_{C_r}\phi(0-t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_{it}^2\,dxdt. \qquad (2.16)$$

Теперь, используя неравенства (2.9) и (2.11) и действую аналогично доказательствусту леммы 2.2, из (2.16) получим требуемую оценку (2.12).

Лемма 2.3 доказана.

Пусть

$$\delta=\sup_{Q_T}\left|\frac{g(x,t)}{m}-1\right|+$$

$$+\sup_{Q_T}\sqrt{2\cdot\sum_{i<j}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}+\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}-\frac{g(x,t)}{m}\right)^2},$$

где $g(x,t)=\sum_{i=1}^n\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}$, постоянную $m>0$ выберем позже.

Лемма 2.4. Если коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (1.3), (1.5) и, более того $\delta<1$, то существует $T_2(\phi,\delta,n)$ такое, что при $T\le T_2$ для любой функции $u\in A(C_r)$ имеет место следующая оценка:

$$J=\int_{C_r}\left(\sum_{i,j=1}^n\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2+u_t^2+\phi^2(0-t)u_{tt}^2+\right.$$
$$\left.+2\phi(0-t)\cdot\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)\,u_{it}^2\right)dxdt\le c_{2.1}(\phi,\delta,n)\int_{C_r}(Lu)^2dxdt. \tag{2.17}$$

Доказательство. Предполагая, что $T\le T_1$, из леммы 2.2 получаем неравенство

$$J^{1/2}\le c_{2.2}\|L_0u\|_{L_2(C_r)}\le c_{2.2}\|Lu\|_{L_2(C_r)}+c_{2.2}\|(L-L_0)u\|_{L_2(C_r)}, \tag{2.18}$$

где $c_{2.2}=[1+2(n+1)q(T)]^{1/2}$. С другой стороны

$$Lu=\frac{g(x,t)}{m}\cdot\sum_{i=1}^n\lambda_i(x',t')\,u_{ii}+$$
$$+\sum_{i=1}^n\left(a_{ij}(x,t)-\delta_{ij}\frac{g(x,t)}{m}\lambda_i(x',t')\right)u_{ij}+\phi(0-t)u_{tt}-u_t,$$

где δ_{ij} символ Кронекера. Следовательно

$$Lu-L_0u=\left(\frac{g(x,t)}{m}-1\right)\cdot\sum_{i=1}^n\lambda_i(x',t')\,u_{ii}+\sum_{i=1}^n\left(a_{ij}(x,t)-\right.$$
$$\left.\delta_{ij}\frac{g(x,t)}{m}\lambda_i(x',t')\right)u_{ij}.$$

Таким образом

$$\|(L-L_0)u\|_{L_2(C_r)}\le\left\{\sup_{C_r}\left|\frac{g(x,t)}{m}-1\right|+\right.$$
$$\left.+\sup_{C_r}\sqrt{2\cdot\sum_{i<j}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}+\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}-\frac{g(x,t)}{m}\right)^2}\right\}\left(\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2\,dxdt\right)^{1/2}.$$

Здесь предполагаем $\sum_{i,j=1}^n\frac{\lambda_i(x',t')}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}=1$. Из последнего неравенства и (2.18), получаем неравенство

$$J^{1/2}\le c_{2.2}\|Lu\|_{L_2(C_r)}+\delta\cdot c_{2.2}\cdot\left(\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2\,dxdt\right)^{1/2}. \tag{2.18}$$

Так как $\delta<1$, существует $T'(\phi,\delta,n)$ такое, что $\delta\big(1+2(n+2)q(T')\big)^{1/2}\le\frac{1+\delta}{2}<1$. Теперь зафиксируем $T_2=min(T_1,T')$. При $T'\le T_2$ из (2.19) следует требуемая оценка (2.17).

Замечание 2.2. Из замечания 2.1 следует, что если коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (1.3), (1.5), и более того, $\delta < 1$, то при $T \leq T_2$, $\tau \in [0,1]$ для любой функции $u \in A(C_r)$ выполняется следующая оценка $J \leq c_{2.1} \int_{C_r} \left(Lu - \frac{\tau}{T} u\right)^2 dxdt$.

Замечание 2.3. Условие (1.3) в доказательстве леммы 2.4 не использовалось. Действительно оно следует из условия $\delta < 1$. Пусть $\delta < 1$, $(x,t) \in C_r$ и $\xi \in E_n$. Имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}(x,t)}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}} - \frac{g(x,t)}{m} \delta_{ij} \frac{\lambda_i(x',t')}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}} \right) \times$$
$$\times \sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\xi_i\xi_j + \left(\frac{g(x,t)}{m} - 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x',t')\xi_i^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x',t')\xi_i^2 \geq$$
$$\geq -\sup_{C_r} \sqrt{2 \cdot \sum_{i<j} \frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)} \right.}$$
$$\left. - \frac{g(x,t)}{m} \right)^2 \Bigg\} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)\xi_i^2\xi_j^2 \right)^{1/2} -$$
$$-\sup_{C_r} \left| \frac{g(x,t)}{m} - 1 \right| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)\xi_i^2\xi_j^2 \right)^{1/2}$$
$$+ \left(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)\xi_i^2\xi_j^2 \right)^{1/2} =$$
$$= (1-\delta) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)\xi_i^2.$$

Неравенство $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq (1+\delta) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)\xi_i^2$ доказывается аналогично. Очевидно, что при $n = 1$ условия (1.3) и $\delta < 1$ эквивалентны в точностью до несингулярного линейного преобразования. Аналогичный результат имеет место при $n = 2$, если след матрицы $\|a_{ij}(x,t)\|$ постоянен в Q_T. Заменим условие (1.3) на более слабое, а именно, предположим, что

$$\inf_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)} = \gamma > 0. \tag{2.20}$$

Действительно, пусть $(x,t) \in Q_T$ и $\xi \in E_n$, имеем

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)\xi_i^2\xi_j^2\right)^{1/2} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2.$$

Равенство $\sup\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}=\gamma^{-1}$ доказывается аналогично.

Лемма 2.5. Если (2.20) выполнено, то условие $\delta<1$ с точностью до несингулярного линейного преобразования следует из условия Кордеса (1.4).

Доказательство. Пусть $p=\sup\limits_{Q_T} g(x,t)$. Проведем линейное преобразование координат $y_i=\frac{x_i}{\sqrt{p}}, i=1,\dots,n;\tau=t$. Тогда, если $a_{ij}(y,\tau)$- коэффициенты образа оператора L при таком преобразовании, то $a_{ij}(y,\tau)=p^{-1}\cdot a_{ij}(x,t)$. Обозначим $\inf\limits_{Q_T} g(x,t)/\sup\limits_{Q_T} g(x,t)$ через $e, p^{-1}g(x,t)$ через $g(y,\tau)$. Пусть, далее $m=1$ при $n=1, m=n-e^2$ при $n>1$. Очевидно, что, если $n=1$ и условие (2.20) выполнено, то оба условия $\delta<1$ и (1.4) эквивалентны. Если $n>1$, то $g(y,\tau)\le m$ следовательно

$$\sup_{\tilde Q_T}\left|\frac{g(y,\tau)}{m}-1\right|=1-\frac{1}{m}\cdot\inf_{\tilde Q_T} g(y,\tau), \tag{2.21}$$

где $\tilde Q_T$ - образ цилиндра Q_T. Тогда

$$\sup_{\tilde Q_T}\sqrt{2\cdot\sum_{i<j}\frac{a_{ij}^2(y,\tau)}{\lambda_i(y,\tau)\lambda_j(y,\tau)}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ii}(y,\tau)}{\lambda_i(y,\tau)}-\frac{g(y,\tau)}{m}\right)^2}\le$$

$$\le\sup_{\tilde Q_T} g(y,\tau)\cdot\sup_{\tilde Q_T}\sqrt{2\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(y,\tau)}{\lambda_i(y,\tau)\lambda_j(y,\tau)}/g^2(y,\tau)+\frac{n-2m}{m^2}}. \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.12)) заключаем, что условие $\delta<1$выполняется, если

$$1-\frac{1}{m}\inf_{\tilde Q_T} g(y,\tau)+\sup_{\tilde Q_T} g(y,\tau)\times$$

$$\times\sup_{\tilde Q_T}\sqrt{2\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(y,\tau)}{\lambda_i(y,\tau)\lambda_j(y,\tau)}/g^2(y,\tau)+\frac{n-2m}{m^2}}<1,$$

т.е.

$$\sup_{\tilde Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(y,\tau)}{\lambda_i(y,\tau)\lambda_j(y,\tau)}/g^2(y,\tau)<\frac{e^2+2m-n}{m^2}. \tag{2.23}$$

Но (2.23) эквивалентно условию (1.4). Лемма 1.2.5 доказана.

Лемма 2.6. Если коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2.20) (1.4) и (1.5), то при $T\le T_2$ для любой функции $u(x,t)\in A(C_r)$ выполняется следующая оценка:

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r)}\le c_{2.3}(\phi,\sigma,n)\cdot\|Lu\|_{L_2(C_r)}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Достаточно показать следующее: для любой функции $u(x,t)\in A(C_r)$справедлива оценка$\int_{C_r} u^2\,dxdt \le c_{2.4}(n)\cdot \int_{C_r}\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)u_i^2\,dxdt$,

$\int_{C_r}\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)u_i^2\,dxdt \le c_{2.5}(n)\cdot\int_{C_r}\sum_{i,j=1}^n \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2\,dxdt.$

С этой целью сделаем такое же преобразование координат, как и в доказательстве Леммы 2.2. Пусть C_r^0 параллелепипед $\{(y,\tau)\ \mid\ |y_i-y_i'|\le rR, i=1,\ldots,n; t'-r^2R^2<\tau<t'\}$ где y' образ точки x'. Продолжим функцию $\tilde{u}(y,\tau)$ нулем в $\overline{C_{r^0}}\backslash\tilde{C}_r$ и обозначим продолженную функцию вновь через $\tilde{u}(y,\tau)$. Пусть $y''=(y_2,\ldots,y_n)$, $y_1\in(y_1'-rR,y_1'+rR)$, $\tau\in(t'-r^2R^2,t')$. Имеем $\tilde{u}(y_1,y'',\tau)=\int_{y_1'-rR}^{y_1}\tilde{u}_1(z,y'',\tau)dz$, т.е.

$$\tilde{u}^2(y_1,y'',\tau)\le(y_1-y_1'+rR)\cdot\int_{y_1-rR}^{y_1}\tilde{u}_1^2(z,y'',\tau)dz\le 2rR\cdot \int_{y_1'-rR}^{y_1'+rR}\tilde{u}_1^2(z,y'',\tau)dz.$$

Интегрируя последнее неравенство по C_r^0, получаем

$$\int_{C_r^0}\tilde{u}^2dyd\tau\le 4r^2R^2\cdot\int_{C_r^0}\tilde{u}_1^2dyd\tau\le 4\cdot\int_{C_r^0}\sum_{i=1}^n\tilde{u}_i^2dyd\tau.$$

Таким образом $\int_{\tilde{C}_r}\tilde{u}^2dyd\tau\le 4\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i=1}^n\tilde{u}_i^2dyd\tau$. Аналогичным образом выводим $\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i=1}^n\tilde{u}_i^2dyd\tau\le 4\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i,j=1}^n\tilde{u}_{ij}^2dyd\tau$. Возвращаясь к переменным (x,t), получаем

$$\int_{C_r}u^2dxdt\le 4\int_{C_r}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2u_i^2dxdt\le 16\int_{\tilde{C}_r}\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2\cdot\left(\frac{\omega_j^{-1}(R)}{R}\right)^2u_{ij}^2dxdt.$$

Теперь достаточно применить лемму 2.1 и требуемая оценка (2.24) доказана.

Лемма 2.7. Если коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2.20), (1.4) и (1.5), тогда существует $T_3(\phi,\delta,n)$ такое, что при $T\le T_3$ и любом $\varepsilon>0$ для любой функции $u(x,t)\in A(C_r)$ выполняется следующая оценка

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r')}\le c_{2.6}(\phi,\sigma,n)\cdot\|Lu\|_{L_2(C_r)}+\varepsilon\cdot\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r)}+\frac{c_{2.7}(\phi,\sigma,n)}{\varepsilon r^2R^2}\|u\|_{L_2(C_r)}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $\xi(x)\in C_0^\infty\left(E_R^{x'}(r)\right)$, $0\le\xi(x)\le 1$, $\xi(x)=1$ в $E_R^{x'}\left(\frac{r}{2}\right)$, $\xi(x)=0$ вне $E_R^{x'}\left(\frac{3r}{4}\right)$ и

$$|\xi_i|\le\frac{c_{2.8}(n)}{r\cdot\omega_i^{-1}(R)},\ |\xi_i|\le\frac{c_{2.8}}{r^2\cdot\omega_i^{-1}(R)\omega_j^{-1}(R)},\ i,j=1,\ldots,n. \quad (2.26)$$

Ясно, что $u(x,t)\cdot\xi(x)\in A(C_r)$. Применяя к этой функции Лемму 1.2.6, получаем

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r')}\le c_{2.3}\cdot\|L(u\cdot\xi)\|_{L_2(C_r)}. \quad (2.27)$$

Но с другой стороны

$$L(u\cdot\xi)=\xi\cdot Lu+u\cdot\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x_j}. \quad (2.28)$$

Поэтому, используя (2.26), заключаем

$$|L(u\cdot\xi)| \le |Lu| + |u|\cdot\frac{c_{2.8}}{r^2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x,t)}{\omega_i^{-1}(R)\omega_i^{-1}(R)} +$$

$$+2\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_iu_j\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\right)^{1/2} =$$

$$= |Lu| + |u|\cdot\frac{c_{2.8}}{r^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x,t)}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}\cdot\frac{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}{\omega_i^{-1}(R)\omega_j^{-1}(R)} +$$

$$+2\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x,t)}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}\cdot\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}u_iu_j\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x,t)}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}\cdot\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\xi_i\xi_j\right)^{1/2} \le$$

$$\le |Lu| + |u|\cdot\frac{c_{2.8}}{r^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\lambda_i(x,t)\cdot\lambda_j(x,t)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2\cdot\left(\omega_j^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2}$$

$$+$$

$$+2\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\right)^{1/4}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\cdot\lambda_j(x,t)u_i^2u_j^2\right)^{1/4}\times$$

$$\times\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}\right)^{1/4}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i(x,t)\cdot\lambda_j(x,t)\xi_i^2\xi_j^2\right)^{1/4} =$$

$$= |Lu| + |u|\cdot\frac{c_{2.8}}{r^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(x,t)}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} +$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)u_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2\right)^{1/2} \le$$

$$= |Lu| + |u| \cdot \frac{c_{2.8}}{r^2} \cdot \frac{n \cdot c_{1.2}}{R^2} + \frac{2}{\gamma} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^{n} c_{1.2} \left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R} \right)^2 \frac{c_{2.8}^2}{r^2 \cdot \left(\omega_i^{-1}(R) \right)^2} \right)^{1/2} =$$

$$= |Lu| + \frac{n \cdot c_{2.8} \cdot c_{1.2}}{\gamma r^2 R^2} \cdot |u| + \frac{2 \cdot c_{2.8} \cdot \sqrt{n c_{1.2}}}{\gamma r R} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_i^2}.$$

Учитывая последнее неравенство в (2.27), приходим к оценке

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r')} \le c_{2.9}(\phi,\sigma,n) \cdot \|Lu\|_{L_2(C_r)} + \frac{c_{2.10}(\gamma,n,\phi)}{r^2 R^2} \cdot \|u\|_{L_2(C_r)} + + \frac{c_{2.11} \cdot (n,\gamma)}{rR} \cdot \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_i^2} \right\|_{L_2(C_r)}. \quad (2.29)$$

С другой стороны

$$J^2 = \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_i^2} \right\|_{L_2(C_r)}^2 = \int_{C_r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_i^2 dxdt \le$$

$$\le c_{1.2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R} \right)^2 \cdot u_i^2 dxdt = c_{1.2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\omega_i^{-1}(R)}{R} \cdot u_i \right\|_{L_2(C_r)}^2.$$

Таким образом

$$J \le \sqrt{c_{1.2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\omega_i^{-1}(R)}{R} \cdot u_i \right\|_{L_2(C_r)}. \quad (2.30)$$

Сделаем ту же замену переменных, что и в доказательстве лемма 1.2.1. Тогда $J \le \sqrt{c_{1.2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{u}_i\|_{L_2(\tilde{C}_r)}$. Согласно интерполяционному неравенству (см. [8]) для любого ε' $\sum_{i=1}^{n} \|\tilde{u}_i\|_{L_2(\tilde{C}_r)} \le \varepsilon' \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \|\tilde{u}_{ij}\|_{L_2(\tilde{C}_r)} + \frac{c_{1.12}}{\varepsilon'} \|\tilde{u}\|_{L_2(\tilde{C}_r)}$. Возвращаясь к переменным (x,t) и учитывая лемму 2.2, получаем

$$\frac{c_{2.11}}{rR} \cdot J \le \frac{c_{2.11} \cdot \varepsilon'}{rR} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\omega_i^{-1}(R)}{R} \cdot \frac{\omega_j^{-1}(R)}{R} u_{ij} \right\|_{L_2(C_r)} + \frac{c_{2.11} \cdot c_{2.13}}{rR \cdot \varepsilon'} \cdot \|u\|_{L_2(C_r)} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon' \cdot c_{2.11} \cdot c_{2.13}}{rR \cdot \varepsilon'} \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r)} + \frac{c_{2.11} \cdot c_{2.13}}{rR \cdot \varepsilon'} \cdot \|u\|_{L_2(C_r)}. \quad (2.31)$$

Выберем $\varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot c_{1.1} \cdot rR}{c_{2.11}}$. Теперь требуемая оценка (2.25) следует из (2.29), (2.30) и (2.31) .

Лемма 2.8. Пусть $A_R = C_{R:1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}}^{-\left(1+\frac{r^2}{8}\right)R^2,0}(0) \backslash \bar{C}_{R:1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16}}^{-\left(1-\frac{r^2}{8}\right)R^2,0}(0)$. Тогда счетной системой цилиндров $C_r'(x^\nu,t^\nu)$, $(x^\nu,t^\nu) \in \Gamma\left(C_{R:1+\frac{r}{2}}^{-\left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2,0}(0) \right)$, $\nu = 1,2,\ldots$ можно покрыт A_R.

Доказательство. Достаточно показать, что счетной системой эллипсоидов $E_R^{x^\nu}\left(\frac{r}{2}\right)$, $x^\nu \in \partial E_R^0\left(1+\frac{r}{2}\right)$, $\nu = 1,2,\ldots$ можно покрыть слой $A'_r = E_R^0\left(1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}\right)\backslash \bar{E}_R^0\left(1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16}\right)$. Пусть $x \in A'_r$. Не теряя в общности, можно считать, что $x_1 \neq 0$. Выберем ζ так, чтобы точка $x^\nu(\zeta, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежала $\partial E_R^0\left(1+\frac{r}{2}\right)$. Имеем

$$\left(\frac{\zeta^2}{\left(\omega_1^{-1}(R)\right)^2}+\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} = 1+\frac{r}{2},$$

$$1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16} < \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} < 1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}.$$

Отсюда следует, что такое ζ существует. Будем считать, что $\operatorname{sign} x_1 = \operatorname{sign}\zeta$. Пусть для определенности $|x_1| \geq |\zeta|$. Тогда

$$\frac{x_1^2-\zeta^2}{\left(\omega_1^{-1}(R)\right)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} - \left(\frac{\zeta^2}{\left(\omega_1^{-1}(R)\right)^2}+\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right) \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16}\right)^2 - \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{16}\cdot\left(2+r+\frac{r^2}{16}\right)^2 < \frac{r^2}{4}.$$

С другой стороны$x_1^2-\zeta^2 \geq (x_1-\zeta)^2$. Поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-x_i^\nu)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(x_1-\zeta)^2}{\left(\omega_1^{-1}(R)\right)^2}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{x_1^2-\zeta^2}{\left(\omega_1^{-1}(R)\right)^2}\right)^2 < \frac{r}{2},$$

и Лемма 1.2.8 доказана.

Лемма 2.9. Пусть $\overline{A_{R_0}} \subset Q_T$ и для $m = 1,2,\ldots$, $R_m = R_0 \cdot a^m$, где числа a таково, что $max\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \sqrt{\frac{1-r^2/8}{1+r^2/8}}\right\} < a < 1$. Тогда $C_{R:1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}}^{-\left(1+\frac{r^2}{8}\right)R_0^2,0}(0)\backslash\{(0,0)\} \subset \bigcup_{m=0}^\infty A_{R_m}$.

Доказательство. Достаточно показать, что для $m = 0,1,2,\ldots$

$$E_{R_m}^0\left(1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16}\right) \subset E_{R_{m+1}}^0\left(1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}\right), \tag{2.32}$$

$$\left(1-\frac{r^2}{8}\right)R_m^2 < \left(1+\frac{r^2}{8}\right)R_{m+1}^2. \tag{2.33}$$

Включение (2.32) эквивалентно тому, что для $m = 0,1,2,\ldots$ и $i = 1,\ldots,n$ $\left(1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{16}\right)\cdot\omega_i^{-1}(R_m) < \left(1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}\right)\cdot\omega_i^{-1}(R_{m+1})$. Используя (1.6), получаем $\alpha R_m < \beta R_{m+1}$. Последнее неравенство выполнено, если $a = \frac{R_{m+1}}{R_m} > \frac{\alpha}{\beta}$. Неравенство (2.33) справедливо, если $a = \frac{R_{m+1}}{R_m} > \sqrt{\frac{1-r^2/8}{1+r^2/8}}$. Тем самым лемма 1.2.9 доказана.

Замечание 2.4. Имеет место включение $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_r(x^\nu, t^\nu) \supset B_R = C_{R:1+\frac{3r}{2}}^{-\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)R^2,0}(0) \backslash \bar{C}_{R:1-\frac{r}{2}}^{-\left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2,0}(0)$, причем покрытие цилиндрами $C_r(x^\nu, t^\nu)$ имеет конечную кратность $N_1(n, r)$.

Замечание 2.5. Имеет место включение $\bigcup_{m=0}^{\infty} B_{R_m} \supset C_{R_j:1+\frac{3r}{2}}^{-\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)R_0^2,0}(0)$, причем покрытие слоями B_{R_m} имеет конечную кратность $N_2(n, r)$. Пусть $C_{R_0}^1(\bar{x}, \bar{t}) = C_{R_0:1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}}^{\bar{t}-\left(1+\frac{r^2}{8}\right)R_0^2,\bar{t}}(\bar{x})$, $C_{R_0}^2(\bar{x}, \bar{t}) = C_{R_0:1+\frac{3r}{2}}^{\bar{t}-\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)R_0^2,\bar{t}}(\bar{x})$, $C_{R_0}^i(0,0) = C_{R_0}^i$, $i = 1,2$.

Лемма 2.10. Если выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5), то для любой функции $u \in C^\infty\left(C_{R_0}^2\right)$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо оценко

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}\left(C_{R_0}^1\right)} \leq c_{2.14}(n, \phi, \sigma) \cdot \|Lu\|_{L_2\left(C_{R_0}^2\right)} + \\ +\varepsilon \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}\left(C_{R_0}^2\right)} + \frac{c_{2.15}(n,\phi,\sigma)}{\varepsilon} \cdot \sup_{C_{R_0}^2}|u|. \tag{2.34}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из леммы 2.7 следует, что для любых $\varepsilon' > 0$ и $\nu = 1,2, \ldots$

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}\left(C_r'(x^\nu,t^\nu)\right)}^2 \leq c_{2.16}(\phi, \sigma, n) \cdot \|Lu\|_{L_2(C_r(x^\nu,t^\nu))}^2 + \\ +\left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(C_r(x^\nu,t^\nu))}^2 + \frac{c_{2.17}(\phi,\sigma,n)}{(\varepsilon')^2 \cdot r^4 R^4} \cdot \|u\|_{L_2(C_r(x^\nu,t^\nu))}. \tag{2.35}$$

где в цилиндрах $C_r{}'$ и C_r положено $R = R_m, m = 0,1,2, \ldots$. Суммируя неравенства (2.35) по всем натуральным ν и используя лемму 2.8, а также замечание 2.4, заключаем

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(A_{R_m})}^2 \leq c_{2.18}(\phi, \sigma, n) \cdot \|Lu\|_{L(B_{R_m})}^2 + \\ +N_1 \cdot \left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi}^{2,2}(B_{R_m})}^2 + \frac{c_{2.19}(\phi,\sigma,n)}{(\varepsilon')^2 r^4 \cdot R_m^4} \cdot \|u\|_{L_2(B_{R_m})}^2.$$

С другой стороны

$$\frac{c_{2.19}(\phi, \sigma, n)}{(\varepsilon')^2 r^4 \cdot R_m^4} \cdot \|u\|_{L_2(B_{R_m})}^2 \leq \frac{c_{2.19}}{(\varepsilon')^2 r^4 \cdot R_m^4} \cdot \int_{B_{R_m}} u^2 dx dt \\ \leq \frac{c_{2.19}}{(\varepsilon')^2 r^4 \cdot R_m^4} \left(\sup_{B_{R_m}}|u|\right)^2 \cdot mes B_{R_m} \leq \\ \leq \frac{c_{2.19}(\phi, \sigma, n)}{(\varepsilon')^2 r^4 \cdot R_m^4} \cdot \left(1 + \frac{3r^2}{4}\right) R_m^2 \cdot \left(1 + \frac{3r}{4}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \omega_i^{-1}(R_m) \times \\ \times \left(\sup_{B_{R_m}}|u|\right)^2 \leq \frac{c_{2.20}(\phi,\sigma,n)}{(\varepsilon')^2} \cdot \left(\sup_{C_{R_0}^2}|u|\right)^2.$$

Таким образом

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(A_{R_m})} \le c_{2.18} \cdot \|Lu\|^2_{L(B_{R_m})} + N_1 \cdot \left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(B_{R_m})} + \frac{c_{2.20}}{(\varepsilon')^2} \cdot \left(\sup_{C^2_{R_0}} |u|\right)^2. \quad (2.36)$$

Просуммируем неравенства (2.36) по m от нуля до бесконечности и использует Лемму 2.9, а также замечания 2.5. Получим

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(C^1_{R_0}\right)} \le c_{2.21}(\phi,\sigma,n) \cdot \|Lu\|^2_{L\left(C^2_{R_0}\right)} +$$

$$+N_1 \cdot N_2 \cdot \left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(C^2_{R_0}\right)} + \frac{c_{2.22}(\phi,\sigma,n)}{(\varepsilon')^2} \cdot \left(\sup_{C^2_{R_0}} |u|\right)^2.$$

Теперь достаточно выбрать $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{N_1 N_2}}$ и требуемая оценка (2.34) доказана.

Замечание 2.6. Оператор L неравномерно вырождается в точке (0,0), то оценка вида (2.34) справедлива и в цилиндрах $C^1_{R_0}(\bar{x},\bar{t})$ и $C^2_{R_0}(\bar{x},\bar{t})$, если только $C^2_{R_0}(\bar{x},\bar{t}) \subset \left(\Omega \times (-T,0)\right)$, $C^2_{R_0}(\bar{x},\bar{t}) \cap C^{-R_0^2,0}_{R_0}(0) = \emptyset$. Кроме того, указанная оценка имеет место при любом $R \in (0,R_0]$. Пусть $\rho > 0$, $Q_T(\rho) = \left\{(x,t)\ |(x,t) \in Q_T, C^2_\rho(x,t) \subset Q_T\right\}$.

Лемма 2.11. Если выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5), то для всякой функции $u \in C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$ при всех $\varepsilon > 0$ и достаточно малых $\rho > 0$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T(\rho))} \le c_{2.23}(\phi,\sigma,n,\rho) \cdot \|Lu\|_{L_2(Q_T)} + \varepsilon \cdot \|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)} + \frac{c_{2.24}(\phi,\sigma,n,\rho)}{\varepsilon} \cdot \sup_{Q_T} |u|. \quad (2.37)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и достаточно малое $\rho > 0$. Покроем $\bar{Q}_T(\rho)$ конечным числом $N_3(n,\rho,r)$ цилиндров вида $C^1_\rho(x^\nu,t^\nu)$. Согласно лемме 2.10 для любого $\varepsilon' > 0$ имеем

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(C^1_\rho(x^\nu,t^\nu)\right)} \le c_{2.24}(\phi,\sigma,n,\rho) \cdot \|Lu\|_{L\left(C^2_\rho(x^\nu,t^\nu)\right)} +$$

$$+\left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(C^2_\rho(x^\nu,t^\nu)\right)} + \frac{c_{2.25}(\phi,\sigma,n,\rho)}{(\varepsilon')^2} \cdot \left(\sup_{Q_T} |u|\right)^2, \nu = 1,\dots,N_3. \quad (2.38)$$

Просуммировав неравенства (2.38) по ν от 1 до N_3, получим

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(Q_\rho(T)\right)} \le c_{2.24} \cdot N_3 \cdot \|Lu\|_{L_2(Q_T)} + N_3 \cdot \left(\varepsilon'\right)^2 \cdot \|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)} + \frac{N_3 \cdot c_{2.25}}{(\varepsilon')^2} \cdot \left(\sup_{Q_T} |u|\right)^2.$$

Теперь достаточно выбрать $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{N_3}}$ и требуемая оценка (2.37) доказана. Обозначим для $\rho > 0$ множество $\left\{x \colon x \in \Omega, E^x_\rho\left(1 + \frac{3r}{2}\right) \subset \Omega\right\}$ через Ω_ρ и пусть $Q'_T(\rho) = \Omega_{2\rho} \times (-T,0)$.

Лемма 2.12. Если выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5), то для всякой функции $u \in C^{\infty}\left(\overline{Q_T}\right)$, $u(x,-T)=0$ при всех $\varepsilon>0$ и достаточно малых $\rho>0$ имеет место оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(Q_T^{'}(\rho)\right)} \le c_{2.26}(\phi,\sigma,n,\rho)\cdot\|Lu\|_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}+\frac{c_{2.27}(\phi,\sigma,n,\rho)}{\varepsilon}\cdot \sup_{Q_T}|u|. \quad (2.39)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon>0$, достаточно малое $\rho>0$ и точку $x^0\in\Omega_{2\rho}$. Рассмотрим цилиндры

$$C^1_{\bar\rho}=C^{-T,-T+\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar\rho^2}_{\bar\rho:1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}}(x^0)=C^1_{\bar\rho}\left(x^0,-T+\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar\rho^2\right),\bar C^1_{\bar\rho}=$$

$$C^{-T-\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar\rho^2,-T}_{\bar\rho:1+\frac{r}{2}+\frac{r^2}{16}}(x^0)=C^1_{\bar\rho}(x^0,-T),$$

$$C^2_{\bar\rho}=C^{-T,-T+\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)\bar\rho^2}_{\bar\rho:1+\frac{3r}{2}}(x^0)=C^2_{\bar\rho}\left(x^0,-T+\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)\bar\rho^2\right),$$

$$\bar C^2_{\bar\rho}=C^{-T-\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)\bar\rho^2,-T}_{\bar\rho:1+\frac{3r}{2}}(x^0)=C^2_{\bar\rho}(x^0,-T),\tilde C^1_{\bar\rho}=C^1_{\bar\rho}\cup\bar C^1_{\bar\rho},\tilde C^2_{\bar\rho}=C^2_{\bar\rho}\cup\bar C^2_{\bar\rho},$$

где $\bar\rho=2\rho$.

Для каждого $x\in R^{x^0}_{\bar\rho}\left(1+\frac{3r}{2}\right)$ продолжим функцию $u(x,t)$ нечетным образом, а коэффициенты оператора L четным образом через гиперплоскость $t=-T$ в цилиндр $\bar C^2_{\bar\rho}$, и обозначим продолженную функцию и оператор вновь через $u(x,t)$ и L, соответственно. Ясно, что $u(x,t)\in W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(\tilde C^2_{\bar\rho}\right)$. Согласно лемме 2.10 для любого $\varepsilon^{'}>0$ имеем

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(\tilde C^1_{\bar\rho})}\le c_{2.28}(\phi,\sigma,n,\rho)\cdot\|Lu\|^2_{L_2(\tilde C^2_{\bar\rho})}+\left(\varepsilon^{'}\right)^2\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(\tilde C^2_{\bar\rho})}+\frac{c_{2.29}(\phi,\sigma,n,\rho)}{(\varepsilon^{'})^2}\cdot\left(\sup_{Q_T}|u|\right)^2.$$

Учитывая характер продолжения функции $u(x,t)$ и коэффициентов оператора L, заключаем

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(\tilde C^1_{\bar\rho})}\le c_{2.28}\cdot\|Lu\|^2_{L_2(\tilde C^2_{\bar\rho})}+N_1\cdot\left(\varepsilon^{'}\right)^2\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(\tilde C^2_{\bar\rho})}+\frac{c_{2.29}}{2\cdot(\varepsilon^{'})^2}\cdot\left(\sup_{Q_T}|u|\right)^2. \quad (2.40)$$

Пусть $\tilde Q_T(\rho)=Q'_T(\rho)\backslash\bar Q_T(\rho)$. Нетрудно видеть, что конечным числом $N_4(n,\rho,r)$ цилиндров вида $C^1_{\bar\rho}\left(x^\nu,-T+\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar\rho^2\right)$, $x^\nu\in\Omega_{2\rho}$, можно покрыть замыкание множества $\tilde Q_T\left(\frac{\bar\rho}{2}\right)$. Действительно, для этого достаточно, чтобы $\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar\rho^2>2\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{\bar\rho}{2}\right)^2$, субэллиптико. $r^2<2$, что выполнено в силу выбора r. Записав неравенства (2.40) для цилиндров $C^1_{\bar\rho}\Big(x^\nu,-T+$

$\left(1+\frac{r^2}{8}\right)\bar{\rho}^2\right)$ и $C^2_{\bar{\rho}}\left(x^\nu,-T+\left(1+\frac{3r^2}{4}\right)\bar{\rho}^2\right)$просуммировав их по ν от 1 до N_4, получаем

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(\tilde{Q}_T\left(\frac{\bar{\rho}}{2}\right)\right)} \leq N_4\cdot c_{2.28}\cdot\|Lu\|^2_{L_2(Q_T)}+N_4\cdot\left(\varepsilon'\right)^2\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}+\frac{N_4\cdot c_{2.29}}{2\cdot(\varepsilon')^2}\cdot\left(\sup_{Q_T}|u|\right)^2 .(2.41)$$

Теперь требуемая оценка (2.39) следует из неравенства (2.41) и лемма 1.2.12 доказана. Пусть $\tilde{Q}''_T(\rho)=Q_T(\rho)\backslash\bar{Q}'_T(\rho)$.

Лемма 2.13. Пусть условия (2.20), (1.4) и (1.5) выполнены относительно оператора L. Тогда существует $\rho_1(\sigma,n,\Omega)$ такое, что если $T\leq T_3$, то для всякой функции $u(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q_T}\right)$, $u\ \Big|_{\Gamma(Q_T)}=0$ при любом $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(Q''_T(\rho_1)\right)}\leq c_{2.30}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\|Lu\|_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}+\frac{c_{2.31}(\phi,\sigma,n,\Omega)}{\varepsilon}\cdot\sup_{Q_T}|u| .(2.42)$$

Докозательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon>0$ и точку $x^0\in\partial\Omega$. Через $B_R(x^0)$ будем обозначать n -мерный шар радиуса R с центром в точке x^0. Так как $\partial\Omega\in C^2$, то существуют невырожденное преобразование пространственных координат $x\to y$ и число $h(x^0)$ такие, что $\partial\tilde{\Omega}\cap B_h(y^0)$ задается уравнением $y_n=0$, а $\tilde{\Omega}\cap B_h(y^0)$ расположено на множестве $\{y\ \ |y_n>0\}$. Здесь $\tilde{\Omega}$ и y^0 образы области Ω и точки x^0, соответственно. Пусть $\tilde{L}$ и $\tilde{u}(y,t)$- образы оператора L и функции $u(x,t)$, соответственно, $Q^+_{T:h}(x^0)=Q^+_{T:h}=(B_h(y^0)\cap\{y\colon y_n\geq 0\})\times(-T,0)$. Так как оператор L вырождается в точке (0,0), то $\tilde{L}$ в $Q^+_{T:h}$ есть равномерно эллиптический оператор. Пусть, далее $Q^+_{T:h}=B_h(y^0)\times(-T,0)$ и $Q_{T:h}=Q_{T:h}\backslash Q^+_{T:h}$. Сформулируем условие, эквивалентное (1.4). Пусть $\mu_i\left(x,t\right)(i=1,\dots,n)$- собственные значения матрицы $A=\left\|\frac{a_{ij}(x,t)}{\sqrt{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}}\right\|$. Тогда $T_r(A)=\sum_{i=1}^n\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}=\sum_{i=1}^n\mu_i(x,t)$ и

$$\sum_{i=1}^n\frac{a^2_{ij}(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)}=T_r(A^2)=\sum_{i=1}^n\bar{\mu}_i(x,t),$$

где $\bar{\mu}_i(x,t)$ собственные значения матрицы A^2. Но очевидно, что $\bar{\mu}_i(x,t)=\mu^2_i(x,t)$; $(i=1,\dots,n)$. Это предполагает, что условие (1.4) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{i=1}^n\mu_i(x,t),$$

где $\sum_{i=1}^n\mu_i(x,t)$. Таким образом, если матрица A удовлетворяет условию (1.4) с постоянной σ, то образ матрицы при невырожденном преобразовании также удовлетворяет условию в форме (1.4) с постоянной σ (и, вместе с этим условию в форме (2.20) с постоянной γ).

Продолжим функцию $\tilde{u}(y,\tau)$ нечетном образом, а коэффициенты оператор $\tilde{L}$ четным образом через гиперплоскость $y_n = 0$ в $\bar{Q}_{T:h}$. Продолженные функцию и оператор вновь обозначим через $\tilde{u}(y,t)$ и $\tilde{L}$, соответственно. Согласно коэрцитивной оценке монографии [5,8] для любого ε' имеем

$$\|\tilde{u}\|^2_{W^{2,2}_{2,\phi}\left(Q_{T:\frac{\square}{2}}\right)} \leq c_{2.32}(\tilde{L},n,T)\cdot\left\|\tilde{L}\tilde{u}\right\|^2_{L_2(Q_{T:\square})} + \left(\varepsilon'\right)^2\cdot\|\tilde{u}\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(Q_{T:\frac{\square}{2}}\right)} +$$

$$\frac{c_{2.32}(\tilde{L},n,T)}{\varepsilon}\cdot\left(\sup_{Q_T}|\tilde{u}|\right)^2,$$

где $W^{2,2}_{2,\phi}$ совпадают с пространством $W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}$ в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 =\ldots= \lambda_n = 1$. Учитывая характер продолжения функции $\tilde{u}(y,t)$ и коэффициентов оператора $\tilde{L}$ и возвращаясь к переменным (x,t), получаем

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\phi}\left(\tilde{Q}^+_{T:\frac{\square}{2}}\right)} \leq c_{2.33}(L,n,\Omega,T)\cdot\|Lu\|_{L_2(\tilde{Q}^+_{T:\square})} +$$

$$+c_{2.34}(\Omega)\cdot\left(\varepsilon'\right)^2\cdot\|u\|^2_{W^2_{2,\phi}\left(\tilde{Q}^+_{T:\frac{\square}{2}}\right)} + \frac{c_{2.35}(L,n,\Omega,T)}{(\varepsilon')^2}\cdot\left(\sup_{Q_T}|u|\right)^2, \tag{2.43}$$

где $\tilde{Q}^+_{T:h}$ прообраз $Q^+_{T:h}$. Нетрудно видеть, что конечным числом $N_5(\Omega,n)$ множеств вида $\tilde{Q}^+_{T:\frac{h(x^\nu)}{2}}(x^\nu), x^\nu \in \partial\Omega$, можно покрыть $\left(\overline{\Omega\backslash\Omega_{2\rho_1}}\right)\times(-T,0)$ при некотором $\rho_1(\sigma,n,\Omega)$. Записывая неравенства (2.43) для множеств $\tilde{Q}^+_{T:\frac{h(x^\nu)}{2}}(x^\nu)$ и $\tilde{Q}^+_{T:h(x^\nu)}(x^\nu)$, а затем суммируя их по ν от 1 до N_5, приходим к оценке

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\phi}\left(Q''_T(\rho_1)\right)} \leq c_{2.36}(L,n,\Omega,T)\cdot\|Lu\|_{L_2(\tilde{Q}_T)} +$$

$$+\varepsilon'\cdot c_{2.37}(n,\Omega)\cdot\|u\|_{\left(Q''_T(\rho_1)\right)} + \frac{c_{2.38}(L,n,\Omega,T)}{\varepsilon'}\cdot\sup_{Q_T}|u|, \tag{2.44}$$

где $\tilde{Q}_T = \bigcup_{\nu=1}^{N_5}\tilde{Q}^+_{T:h(x^\nu)}(x^\nu)$. При этом можно считать $h(x^1),\ldots,h(x^{N_5})$ настолько малыми, что если $(x,t)\in\tilde{Q}_T$, то $x\in E^0_1(\delta)$, где $\delta > 0$ зависит лишь от n и Ω. Тогда, действуя так же, как и в доказательстве Леммы 1.2.1, получаем, что для $(x,t)\in\tilde{Q}_T$

$$c_{2.39}(L,n,\Omega,T)\cdot\left(\omega_i^{-1}(1)\right)^2 \leq \lambda_i(x,t) \leq c_{2.40}(L,n,\Omega,T)\cdot\left(\omega_i^{-1}(1)\right)^2, i = 1,\ldots,n.$$

Отсюда следует, что

$$c_{2.41}(L,n,\Omega,T)\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}\left(Q''_T(\rho_1)\right)} \leq \|u\|_{W^{2,2}_{2,\phi}\left(Q''_T(\rho_1)\right)}, \tag{2.45}$$

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\phi}(Q_T)} \leq c_{2.42}(L,n,\Omega,T)\cdot\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}. \tag{2.46}$$

Теперь требуемая оценка (2.42) следует из неравенств (2.44) – (2.46).

Теорема 2.1. Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5), то при $T \leq T_3$ для любой функции $u(x,t)\in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $u\ \big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)} \le c_{2.43}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\left(\|Lu\|_{L_2(Q_T)}+\sup_{Q_T}|u|\right). \qquad (2.47)$$

Доказательство. Из Леммы (2.11)-(2.13) следует, что для любого $\varepsilon>0$ верно неравенство

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)} \le c_{2.44}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\|Lu\|^2_{L_2(Q_T)}+$$

$$+c_{2.45}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\varepsilon^2\cdot\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}+\frac{c_{2.44}(\phi,\sigma,n,\Omega)}{\varepsilon^2}\cdot\left(\sup_{Q_T}|u|\right)^2.$$

Теперь достаточно выбрать $\varepsilon=(2\cdot c_{2.45})^{-\frac{1}{2}}$ и требуемая оценка (2.47) доказана.

Теорема 2.2. Пусть относительно коэффициентов оператора выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5), а

$$n+1<q<\frac{n(n+1)}{n-2}. \qquad (2.48)$$

Тогда существует $T_4=T_4(L,n,\Omega)$ такое, что при $T\le T_4$ для любой функции $u(x,t)\in W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)$ справедлива оценка

$$\sup_{Q_T}|u|\le c_{2.47}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\|Lu\|_{L_q(Q_T)}. \qquad (2.49)$$

Доказательство. Действуя так же, как и при доказательстве аналогичной оценки типа А.Д. Александрова в работе [9, 10], получаем

$$M^{n+1}\le c_{2.48}(\phi,\sigma,n)\int_{Q_T}\frac{|Lu|^{n+1}}{d(x,t)}dxdt, \qquad (2.50)$$

Здесь $M=\sup_{Q_T}|u|$,

$$\lambda_i(x,t)=\left(\frac{\omega_i^{-1}\left(\rho(x)+\sqrt{|t|}\right)}{\rho(x)+\sqrt{|t|}}\right)^2\ge\left(\frac{\omega_i^{-1}(\rho(x))}{\rho(x)}\right)^2\ge\left(\frac{\omega_i^{-1}(\omega_i(|x_i|))}{\omega_i(|x_i|)}\right)^2=\left(\frac{|x_i|}{\omega_i(|x_i|)}\right)^2,$$

$$d(x,t)=det\left(\|a_{ij}(x,t)\|\right)\ge c_{2.49}(L,n,Q_T)\cdot\prod_{i=1}^n\lambda_i(x,t)\ge c_{2.49}\cdot$$

$$\prod_{i=1}^n\left(\frac{|x_i|}{\omega_i(|x_i|)}\right)^2,$$

и в силу предположения функции $\frac{\omega_i^{-1}(z)}{z}, i=1,\dots,n$ возрастают на $(0,\infty)$.

Из (2.50), имеем

$$M^{n+1}\le c_{2.50}(\phi,n,\sigma,Q_T)\cdot\int_{Q_T}|Lu|^{n+1}\cdot\prod_{i=1}^n\left(\frac{\omega_i(|x_i|)}{|x_i|}\right)^2dxdt.$$

Для $(x,t)\in Q_T$ в силу неравенства Гельдера с показателями $\frac{q}{n+1}$, $\frac{q}{q^{-n-1}}$ при $q>n+1$ имеем

$$M^{n+1}\le c_{2.50}\cdot\left(\int_{Q_T}|Lu|^q dxdt\right)^{\frac{n+1}{q}}\left(\prod_{i=1}^n\int_{Q_T}\left(\frac{\omega_i(|x_i|)}{|x_i|}\right)^{\frac{2q}{q-n-1}}dxdt\right)^{\frac{q-n-1}{q}}.$$

Пусть $\Pi_R=\{x:|x_i|<\omega_i^{-1}(R)\}i=1,\dots,n$ и $\bar{\Omega}\subset\Pi_R$. Тогда

$$M\le c_{2.51}(\phi,n,\sigma,Q_T)\cdot\|Lu\|_{L_q(Q_T)}\left(\prod_{i=1}^n\int_0^{\omega_i^{-1}(R)}\left(\frac{\omega_i(z)}{z}\right)^{\frac{2q}{q-n-1}}dz\right)^{\frac{q-n-1}{(n+1)\cdot q}}. \qquad (2.51)$$

Отсюда с учетом условия (1.6) и (1.7) имеем

$$\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\omega_i^{-1}(R)}\left(\frac{\omega_i(z)}{z}\right)^{\frac{2q}{q-n-1}}dz \le A^n \mathrm{mes}\Pi_R\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{R}{\omega_i^{-1}(R)}\right)^{\frac{2q}{q-n-1}}<\infty. \qquad (2.52)$$

Отметим, что из (1.6)-(1.7) следует, что $\frac{2q}{q-n-1}>n$ т.е. $q<\frac{n(n+1)}{n-2}$. Тогда требуемая оценка (2.49) следует из неравенств (2.51)- (2.52).

Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. Пусть $T_0=min\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$ и относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (2.20), (1.4) и (1.5). Тогда, если q выбрано согласно условию (2.48), то при $T\le T_0$ для любой функции $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}\le c_{2.52}(\phi,\sigma,n,\Omega)\cdot\|Lu\|_{L_q(Q_T)}. \qquad (2.53)$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 и 2.2 заключаем

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi}(Q_T)}\le c_{2.43}\left(\|Lu\|_{L_2(Q_T)}\right)+c_{2.47}\left(\|Lu\|_{L_q(Q_T)}\right)$$

Теперь достаточно учесть, что $\|Lu\|_{L_2(Q_T)}\le(\mathrm{mes}Q_T)^{\frac{q-2}{2q}}\cdot\|Lu\|_{L_q(Q_T)}$ и требуемая оценка (2.53) доказано.

Теорема 2.4. Пусть функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям (1.5) и для $\varepsilon>0$ оператор L_ε имеет то же значение, что и в Лемме 2.2. Тогда при $T\le T_0$ для любой функции $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ выполняется оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}(Q_T)}\le c_{2.53}(\phi,n,\Omega)\cdot\|L_\varepsilon u-\mu u\|_{L_q(Q_T)}. \qquad (2.54)$$

Здесь $\mu=T^{-1}$, $W^{2,2}_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}(Q_T)$ банахово пространство функций $u(x,t)$, заданное на Q_T с конечной нормой, заданной равенством вида (*) с заменой функции $\phi(0-t)$ на $\phi_\varepsilon(0-t)$ и $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi_\varepsilon}(Q_T)$ пополние множества всех функций из $C^\infty(\bar{Q}_T)$, стремящихся к нулю на ∂Q_T, по норме пространства $W^{2,2}_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}(Q_T)$.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для функций $u(x,t)\in C^\infty(\bar{Q}_T)$,$u\ \big|_{\Gamma(Q_T)}=0$. Заметим, что по (2.19) $q(T_1)\le 1$. Тогда рассуждая так же, как в доказательстве Лемм 2.6, (2.6), (2.9)-(2.12) и Теорема 2.1 из (2.12) заключаем, что существует $T_5(\phi,n,\Omega)\le T_1$ такое, что если $T\le T_5$, то для любой функции $\vartheta(x,t)\in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $\vartheta\ \big|_{\Gamma(Q_T)}=0$, $\vartheta\ \big|_{t=0}=\vartheta_t\ \big|_{t=0}=0$ выполняется оценка

$$\|\vartheta\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}(Q_T)}\le c_{2.54}(\phi,\sigma,\Omega)\left(\|L_\varepsilon\vartheta\|_{L_2(Q_T)}+\sup_{Q_T}|\vartheta|\right). \qquad (2.55)$$

Допустим, что $T \leq T_5/2$. Пусть $R = T/4$ и $u(x,t) \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $u\ \big|_{\partial Q_T} = 0$. Рассмотрим функцию $\eta(t) \in C^\infty[-T,0]$ такую, что $\eta(t) = 1$ при $[-T, 0 - R]$, $\eta(t) = 0$ при $t \in \left[0 - \frac{R}{2}, 0\right]$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ и

$$\left|\eta_t'(t)\right| \leq \frac{c_{2.55}}{R}, \left|\eta_{tt}''(t)\right| \leq \frac{c_{2.55}}{R^2}. \qquad (2.56)$$

Предполагая в (2.55) $\vartheta(x,t) = u(x,t)\cdot\eta(t)$ с учетом (2.56), получаем

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}(Q_{0-R})} \leq c_{2.54}\cdot\left(\|L_\varepsilon(u\cdot\eta)\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)}\right) \leq$$

$$\leq c_{2.54}\cdot\left(\|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)} + \left(\frac{c_{2.55}}{R}+1\right)\cdot\|u\|_{L_2(Q_T)} + \frac{c_{2.55}}{R}\cdot\|\phi_\varepsilon u_t\|_{L_2(Q_T)} + \frac{c_{2.55}}{R^2}\cdot \|\phi_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad (2.57)$$

Из условий (1.5) следует, что $\sup\limits_{[-T,0]}\phi(z) \leq c_{2.56}(\phi)\cdot T$. Таким образом, принимая во внимание, что $\sup\limits_{[-T,0]}\phi_\varepsilon(z) = \sup\limits_{[-T,0]}\phi(z)$, заключаем, что

$$\|\phi_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)} \leq c_{2.56}T\cdot\|u\|_{L_2(Q_T)}. \qquad (2.58)$$

С другой стороны, для любого $\alpha' > 0$, выполняется следующее интерполяционное неравенство

$$\|\phi_\varepsilon u_t\|_{L_2(Q_T)} \leq c_{2.56}T\cdot\alpha'\|\phi_\varepsilon u_{tt}\|_{L_2(Q_T)} + 3\left(\alpha'\right)^{-1}\cdot\|u\|_{L_2(Q_T)}. \qquad (2.59)$$

Действительно, зафиксируем произвольное $\alpha' > 0$ и рассмотрим интеграл $K = \int_{Q_T}\left(\nu\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt} + \frac{1}{\nu}u\right)^2 dxdt$ при $\nu > 0$. Ясно, что $K > 0$. В то же время

$$K = \nu^2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^4(0-t)u_{tt}^2dxdt + \frac{1}{\nu^2}\int_{Q_T}u^2dxdt + 2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u\cdot u_{tt}dxdt \leq$$

$$\leq c_{2.56}^2\cdot T^2\cdot\nu^2\cdot\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt}^2dxdt + \frac{1}{\nu^2}\int_{Q_T}u^2dxdt +$$

$$+2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)\left[\frac{\partial}{\partial t}(u\cdot u_t) - u_t^2\right]dxdt$$

$$= c_{2.56}^2\cdot T^2\cdot\nu^2\cdot\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt}^2dxdt +$$

$$+\frac{1}{\nu^2}\int_{Q_T}u^2dxdt + 2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(u\cdot u_t)dxdt - 2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_t^2dxdt =$$

$$= c_{2.56}^2\cdot T^2\cdot\nu^2\cdot\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_{tt}^2dxdt + \frac{1}{\nu^2}\int_{Q_T}u^2dxdt +$$

$$+4\int_{Q_T}\phi_\varepsilon(0-t)\cdot\phi_\varepsilon'(0-t)\cdot u\cdot u_tdxdt - 2\int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_t^2dxdt. \qquad (2.60)$$

Используя то, что $q(T) \leq 1$ и принимая во внимание, что (2.11), получаем

$$4\int_{Q_T}\phi_\varepsilon(0-t)\phi_\varepsilon'(0-t)u\cdot u_tdxdt \leq \int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_t^2dxdt +$$

$$+4\int_{Q_T}\left(\phi_\varepsilon'(0-t)\right)^2u^2dxdt \leq \int_{Q_T}\phi_\varepsilon^2(0-t)u_t^2dxdt + 4\int_{Q_T}u^2dxdt. \qquad (2.61)$$

Из (2.60) - (2.61) следует, что

$$0 \leq c_{2.56}^2 \cdot T^2 \cdot \nu^2 \cdot \int_{Q_T} \phi_\varepsilon^2(0-t) u_{tt}^2 dxdt + \frac{1}{\nu^2} \int_{Q_T} u^2 dxdt -$$
$$-2 \int_{Q_T} \phi_\varepsilon^2(0-t) u_t^2 dxdt + \int_{Q_T} \phi_\varepsilon^2(0-t) u_t^2 dxdt + 4 \int_{Q_T} u^2 dxdt.$$

Таким образом

$$\int_{Q_T} \phi_\varepsilon^2(0-t) u_t^2 dxdt \leq c_{2.56}^2 T^2 \nu^2 \int_{Q_T} \phi_\varepsilon^2(0-t) u_{tt}^2 dxdt + (\nu^{-2} + 4) \int_{Q_T} u^2 dxdt.$$

Теперь достаточно положить $\nu = min\{\alpha', 1\}$. Неравенство (2.59) доказана. Используя (2.58) и (2.59) в (2.57) заключаем, что для любого $\alpha^{'} > 0$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_{0-R})} \leq c_{2.54} \cdot \|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)} + \alpha^{'} \cdot c_{2.57}(\phi, n, \Omega) \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)} + \frac{c_{2.58}(\phi,n,\Omega)}{\alpha' R} \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)}. \quad (2.62)$$

Зафиксируем произвольное $\alpha > 0$ и выберем $\alpha^{'} = \frac{\alpha}{c_{2.57}}$. Тогда из (2.62) следует, что

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_{0-R})} \leq c_{2.54} \cdot \|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)} + \alpha \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)} + \frac{c_{2.59}(\phi,n,\Omega)}{\alpha T} \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)}. \quad (2.63)$$

Аналогично можно показать, что если $Q' = \Omega \times (0 - 2R, 0 + 2R)$, $Q'' = \Omega \times (0 - R, 0 + R)$, $S(Q') = \partial\Omega \times [0 - 2R, 0 + 2R]$, то для любой функции $\omega(x,t) \in C^\infty(Q')$, $\omega \ \big|_{S(Q')} = 0$ для любого $\alpha > 0$ имеет место следующая оценка

$$\|w\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q^{''})} \leq c_{2.54} \cdot \|L_\varepsilon w\|_{L_2(Q^{'})} + \alpha \cdot \|w\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q^{'})} + \frac{c_{2.59}}{\alpha T} \cdot \|w\|_{L_2(Q^{'})}. \quad (2.64)$$

Пусть $Q'_+ = \Omega \times (0 - 2R, 0)$, $Q'_- = \Omega \times (0,0 + 2R)$, $Q''_+ = \Omega \times (0 - 2,0)$. Продолжим функции $u(x,t)$ и $\phi_\varepsilon(0-t)$ через гиперплоскость $t = 0$ из Q'_+ в Q'_- и снова обозначим полученные функции через $u(x,t)$ и $\phi_\varepsilon(0-t)$, соответственно. Предполагая в (2.64) $w = u$ и принимая во внимание равенство $\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q'')} = \sqrt{2} \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q''_+)}$ и аналогичные равенства для норм $\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q')}$, $\|u\|_{L_2(Q')}$ и $\|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q^{'})}$, получим,что

$$\|w\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_+^{''})} \leq c_{2.54} \cdot \|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_+^{'})} + \alpha \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_+^{'})} + \frac{c_{2.59}}{\alpha \cdot T} \cdot \|u\|_{L_2(Q_+^{'})}. \quad (2.65)$$

Объединяя (2.63), (2.65) и выбирая α, заключаем, что

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)}^2 \leq c_{2.60}(\phi, n, \Omega) \cdot \left(\|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \frac{1}{T^2} \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)}^2\right). \quad (2.66)$$

С другое стороны, если мы вспомним, что $\mu = \frac{1}{n}$, то имеем

$$\int_{Q_T} (L_\varepsilon u - \mu u)^2 dxdt = \|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \mu^2 \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)}^2 - 2\mu \cdot \int_{Q_T} u \cdot L_\varepsilon u dxdt. \quad (2.67)$$

Кроме того

$$K_1 = -2\mu \cdot \int_{Q_T} u \cdot L_\varepsilon u dxdt =$$

$$= -2\mu \int_{Q_T} u \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x', t') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \phi_\varepsilon(0-t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt =$$

$$= 2\mu \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x', t') u_i^2 dxdt - 2\mu \int_{Q_T} u \cdot \phi_\varepsilon(0-t) u_{tt} dxdt + \mu \int_{Q_T} (u^2)_t dxdt$$

$$\geq$$

$$\geq 2\mu \int_{Q_T} \phi_\varepsilon(0-t) u_t^2 dxdt - 2\mu \int_{Q_T} \phi_\varepsilon'(0-t) u \cdot u_t dxdt. \qquad (2.68)$$

Теперь покажем, что при $z \in (-T, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\phi_\varepsilon(z) \geq \beta_1 z \phi_\varepsilon'(z). \qquad (2.69)$$

В силу, условий (1.5), достаточно проверить выполнение (2.69) только для $z \in (-T, \varepsilon)$. Но для таких z неравенство (2.69) эквивалентно, неравенству $\phi(\varepsilon) - \frac{\phi'(\varepsilon)\cdot\varepsilon}{m} \geq \frac{\phi'(\varepsilon)}{m\varepsilon^{m-1}} \cdot z^m$, где $m = 2\beta^{-1}$. Но последнее неравенство выполняется, если имеет место оценка

$$\phi(\varepsilon) \geq \frac{2}{m} \phi'(\varepsilon) \cdot \varepsilon. \qquad (2.70)$$

Теперь достаточно заметить, что (2.70) выполнено в силу (1.5). Таким образам, из (2.67) при условиях (2.68) и (2.11) получаем неравенство

$$K_1 \geq -\frac{\mu}{2} \int_{Q_T} \frac{[\phi_\varepsilon'(0-t)]^2}{\phi_\varepsilon(0-t)} u^2 dxdt \geq -\frac{\mu}{2\beta} \int_{Q_T} \frac{\phi_\varepsilon'(0-t)}{0-t} u^2 dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{\mu \cdot q(T) \cdot T}{2\mu} \cdot \int_{Q_T} \frac{u^2}{(0-t)^2} dxdt. \qquad (2.71)$$

Применим неравенство Харди [11], согласно которому

$$\int_{Q_T} \frac{u^2}{(0-t)^2} dxdt \leq 4 \int_{Q_T} u_t^2 dxdt. \qquad (2.72)$$

Тогда из (2.67), (2.71) и (2.72) заключаем, что

$$\|L_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \mu^2 \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)} \leq \|L_\varepsilon u - \mu u\|_{L_2(Q_T)}^2 + \frac{q(T)}{\beta} \cdot \|u\|_{W_{2,\lambda,\phi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)}^2. \qquad (2.73)$$

Теперь выберем такое малое T_6, что $q(T_6) \leq \frac{\beta}{4c_{2.60}}$ и зафиксируем $T_7 = min\left\{\frac{T_5}{2}, T_6\right\}$. Тогда (2.66) и (2.72) влекут требуемую оценку (2.54).

Теорема 2.4 доказана.

В заключение автор выражает благодачность проф. Ф.И.Мамедову за постановку задачи и обсуждение результатов. проф

Литература

1. Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений 2-го порядка с

разрывными коэффициентами. Матем. Сбор., V.131(173), N.4(12), (1986), pp.477-500.
2. Аманова Н.Р. Краевая задача для вырожденных эллиптико-параболических уравнения второго порядка, Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат. наук, N.IV, (2023).
3. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, V.77, N.2, (1951), pp.181-183.
4. Мамедов И.Т. Первая краевая задача для эллиптически - параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, Современная математика, Фундаментальные направления, V.39, (2011), pp.102-129.
5. Amanova N.R. On strong solvability of the Dirichlet problem for a class of no uniformly degenerated elliptic equations of second order, Caspian j. of applied Mathematics, ecology and economics, V.V, N.IV, (2017), pp.3-26.
6. Cordes H.O. Uber die erste zandweraf gabe bei quasilinearen differentialglichungen zwetter ornung in mehr ais zwei variable, Math Ann., V.131, (1956) , pp.278-312.
7. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems of elliptic - parabolic equations of second order, Boundary probl. in Diffen. Equations (proc. Sympos., Madison, (1959), Aprel 20-22), (1960), pp.97-120.
8. Hardy G. H., Littlewood I.E. Polya G. Inequalities. Cambridge: Camdridge Univ. press, (1952).
9. Mamedov I.T. An inequality of A.D. Aleksandrov type for degenerate elliptic-parabolic operators of second order, Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb, V.13, (2000), pp.92-96.
10. Mamedov I.T., Salmanova Sh. Yu. The A. D. Aleksandrov type inequality for a class of second order equations with non-negative characteristic form, Trans. NAS Azerb., N.IV, (2001), pp.108-114.
11. Talanti G. Sopra und classe di equazioni ellipticheа coefficienti misurableili, Ann. Mat. Pura. Appl, V.69, (1965), pp.285-304.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC – PARABOLIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

N.R. Amanova
Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: amanova.n.93@gmail.com

Abstract. In the paper the first boundary problem for a non-uniform and strong degenerated non-divergent second order elliptic-parabolic equation is considered. A Cordes type condition is proved which ensures the existence of a unique solution of the first boundary value problem in a suitable weighted Sobolev space.

Keywords: Nonuniform and strong degeneration, elliptic-parabolic equations.

References

1. Alhutov Ju.A., Mamedov I.T. Pervaja kraevaja zadacha dlja nedivergentnyh parabolicheskih uravnenij 2-go porjadka s razryvnymi kojefficientami. Matem. Sbor., V.131(173), N.4(12), (1986), pp.477-500.(Alkhutov Yu.A., Mamedov I.T. The first boundary value problem for non-divergence parabolic equations of the second order with discontinuous coefficients. Mat. Sbornik, V.131(173), N.4(12), (1986), pp.477-500)
2. Amanova N.R. Kraevaja zadacha dlja vyrozhdennyh jelliptiko-parabolicheskih uravnenija vtorogo porjadka, Vestnik Bakinskogo Universiteta, ser.fiz.-mat. nauk, N.IV, (2023).(Amanova N.R. Boundary value problem for degenerate elliptic-parabolic equations of the second order, Bulletin of Baku University, series of physical and mathematical sciences, N.IV, (2023))
3. Keldysh M.V. O nekotoryh sluchajah vyrozhdenija uravnenij jellipticheskogo tipa na granice oblasti, DAN SSSR, V.77, N.2, (1951), pp.181-183 (Keldysh M.V. On some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of a domain, DAN SSSR, V.77, N.2, (1951), pp.181-183).
4. Mamedov I.T. Pervaja kraevaja zadacha dlja jellipticheski - parabolicheskih uravnenij vtorogo porjadka s razryvnymi kojefficientami, Sovremennaja matematika, Fundamental'nye napravlenija, V.39, (2011), pp.102-129.(Mamedov I.T. The first boundary value problem for elliptic-parabolic equations of the second order with discontinuous coefficients, Modern Mathematics, Fundamental Directions, V.39, (2011), pp.102-129)
5. Amanova N.R. On strong solvability of the Dirichlet problem for a class of no uniformly degenerated elliptic equations of second order, Caspian j. of applied Mathematics, ecology and economics, V.V, N.IV, (2017), pp.3-26.
6. Cordes H.O. Uber die erste zandweraf gabe bei quasilinearen differentialglichungen zwetter ornung in mehr ais zwei variable, Math Ann., V.131, (1956) , pp.278-312.
7. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems of elliptic - parabolic equations of second order, Boundary probl. in Diffen. Equations (proc. Sympos., Madison, (1959), Aprel 20-22), (1960), pp.97-120.
8. Hardy G. H., Littlewood I.E. Polya G. Inequalities. Cambridge: Camdridge Univ. press, (1952).
9. Mamedov I.T. An inequality of A.D. Aleksandrov type for degenerate elliptic-parabolic operators of second order, Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb, V.13, (2000), pp.92-96.
10. Mamedov I.T., Salmanova Sh. Yu. The A. D. Aleksandrov type inequality for a class of second order equations with non-negative characteristic form, Trans. NAS Azerb., N.IV, (2001), pp.108-114.
11. Talanti G. Sopra und classe di equazioni ellipticheaa coefficienti misurableili, Ann. Mat. Pura. Appl, V.69, (1965), pp.285-304.